1.- Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = sen\left(\left(sen^3(x^3)+1\right)^3\right)$ b) $y = \dfrac{sen^2(2x)+2senx\cos x+\cos^2(2x)}{sen(2x)}$

c) $y = \dfrac{2\pi \ln(x^3+x)}{tg(\pi x)}$ d) $y = \dfrac{\sqrt{xe^x}}{\sqrt[4]{x^3-x^2}}$ e) $y = \dfrac{e^{x^2}}{\sqrt{x^3-1}}$ f) $y = x^{e^x}$

g) $y = (x+senx)^{\sqrt{x}}$ h) $y = (senx+\cos x)^{senx-\cos x}$ i) $y = \dfrac{arcsen(3^x)}{x\cdot\cos^3(e^x)}$

2.- Si $f(x) = \dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{4x}$, indica razonadamente, en qué valor de $x = a$ no está definida.

Ahora, halla el valor de b para que la función $g(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq a \\ b & si \quad x = a \end{cases}$ sea continua.

3.- Estudia la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones:

$$y = \begin{cases} x+\cos x & si \;\; x \leq 0 \\ \dfrac{senx}{x} & si \;\; x > 0 \end{cases} \qquad y = \begin{cases} senx & si \;\; \frac{3\pi}{2} \leq x < 3\pi \\ x-3\pi & si \;\; 3\pi \leq x \leq 12 \end{cases}$$

4.- Estudia la monotonía de las funciones: $y = x\cdot e^{-x}$ $\quad y = \left(2x^3-4x^2\right)e^{-x}$ $\quad y = \dfrac{e^x}{x}$

5.- Estudia la monotonía y curvatura de la función $y = (x+1)e^{-x}$

6.- Determina las ecuaciones de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2xe^x + \dfrac{x^3-2}{x^2+4}$ en el punto de abscisa x=0.

7.- Sea $f:\Re \to \Re$ definida por $f(x) = 2x^3+12x^2+ax+b$. Determina a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y = 2x+3$.

8.- Calcula los valores del parámetro a, $a \neq 0$, que hacen que las tangentes a la curva de ecuación $y = ax^4+2ax^3-ax+1512$ en los puntos de inflexión sean perpendiculares.

9.- Considera la función $f(x) = ax^2+bx+11$, donde a y b son parámetros reales. Determina el valor de a y b para que $f(x)$ tenga un extremo (máximo o mínimo) relativo en el punto (2,5). ¿Es máximo o mínimo?

10.- Dada la función $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$, calcula c sabiendo que la recta tangente en el punto x=0 es horizontal. Una vez calculado c, halla a y b sabiendo que esta función tiene un extremo relativo en el punto x=-2 y corta al eje X en x=1.

11.- Halla a, b y c para que la curva $f(x) = a + bx^2 + \frac{c}{x}$ presente un punto de inflexión en (1,1) y pasa por el punto (2,-6).

12.- Sea considera la función real $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, donde $a, b\, y\, c \in \Re$.
a) Averiguar los valores de $a\, y\, b$ para los que las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ en los puntos de abscisas $x = 2$ y $x = 4$ son paralelas al eje OX.
b) Además obtener el valor de c para que la gráfica de $f(x)$ tenga el punto de inflexión en el eje OX.

13.- Halla a y b sabiendo que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$ en su punto de inflexión es la recta y=2x+3.

14.- Halla a y b sabiendo $f(x) = x^3 + ax^2 + ax + 1$ presenta un punto de inflexión en (0,1) y la pendiente de la recta tangente en ese punto valga 1.

15.- Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde $m > 0$ es una constante.
a) Para cada m halla el valor de a >0 tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas.
b) Halla el valor de m para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de f.

16.- Representa gráficamente las funciones: a) $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$ b) $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{(x-1)(x+3)}$

c) $y = x^2 \cdot e^x$ d) $y = \frac{x^2 \cdot (1-x)}{x^2 - 1}$ e) $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ f) $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$ g) $y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

h) $y = (x-1) \cdot e^{-x}$ i) $y = x + \sqrt{x}$ j) $y = (\ln x)/x$ k) $y = \ln(x^2 - 4)$

17.- Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$ b) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{sen^2 x}{2x} \right)$ c) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos^2 x}{x^2} \right)$ d) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{x}\, senx}$

e) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{tg^2(2x)}{x^2 + 2x} \right)$ f) $\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{2 + senx}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$ g) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{4x}{\ln(1+x)} \right)$ h) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$

j) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{2x^2}{tg^2 x} \right)$ k) $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\ln\left(\frac{2x-1}{2x}\right)}$ l) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{e^x - 1}$ m) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ n) $\lim_{x\to 0} (1 + senx)^{\frac{1}{2x}}$

18.- Calcula la ecuación de la recta que, pasando por el punto A(4,3) determina con los semiejes positivos un triángulo de área máxima.

19.- Una caldera tiene forma de prisma recto de base cuadrada y un volumen de $768\,cm^3$. Se sabe que la pérdida de calor a través de las paredes laterales vale 100 unidades por cm^2, mientras que a través del techo es de 300 unidades por cm^2. La perdida por el suelo es tan pequeña que puede considerarse nula. Calcula las dimensiones de la caldera para que la pérdida de calor sea mínima.

20.- Unos altos hornos producen al día x toneladas de acero de baja calidad y $\frac{40-5x}{10-x}$ toneladas de acero de alta calidad, siendo 8 toneladas la producción máxima diaria de acero de baja calidad. Si el precio de una tonelada de acero de baja calidad es de 100€ y el precio de una tonelada de acero de alta calidad es 250€, demostrar que se deben producir 5 toneladas por día de acerote baja calidad para que el valor de venta de la producción diaria sea máximo.

21.- Hallar las dimensiones del cartel de área máxima con forma de rectángulo que tiene dos vértices sobre el eje OX, y los otros dos sujetos a una estructura rígida parabólica de ecuación $y = 12 - x^2$.

22.- Queremos hacer un envase con tapa y forma de prisma rectangular de base cuadrada y cuya capacidad sea 10.000 cm^3. Sabiendo que cada cm^2 del material de la base sale un 50% más caro que cada cm^2 del material de las paredes, halla las dimensiones del envase para que su precio sea el menor posible.

23.- Encuentra tres números no negativos que sumen 14, tales que uno sea el doble que otro y que la suma de sus cuadrados sea máxima (repite el ejercicio para mínimo).

24.- El precio de un bloque de cierto material es el triple del cuadrado de su peso. Así, un bloque de 20 kg. cuesta 1200€. Se rompe el bloque en dos. Calcula cuánto pesa cada uno de los dos trozos para que el precio sea el mínimo.

25.- La producción y puesta en venta de x unidades de cierto producto, le cuesta a una empresa $C(x) = \frac{x^3}{12} - \frac{5x^2}{2} + 30x + 100$ (en euros). Si el precio de venta de una unidad es p=21€, ¿qué cantidad debe producir y vender la empresa para obtener máximos beneficios?¿A cuánto asciende dicho beneficio?

26.- Un cultivador de naranjas estima que, si se plantan 60 naranjos en un huerto, la producción media por árbol será de 400 naranjas, y ésta disminuirá en un promedio de 5 naranjas por árbol, por cada árbol adicional plantado en el huerto. Determina la función de producción total de naranjas. ¿Cuántos árboles se deben plantar en el huerto para maximizar la producción total de naranjas?¿Cuál es dicha producción máxima?

27.- Encuentra dos números que sumen 10 y la suma de sus cuadrados sea mínima.

28.- Para la construcción de una ventana se le da forma de cuadrado con un semicírculo en su parte superior. Determina las medidas de la ventana, con 16 metros de perímetro, si se desea que tenga la mayor superficie posible, para que la luminosidad sea máxima.

29.- Divide un segmento de 6 cm. de longitud en dos partes tales que sea mínima la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre ellas.

30.- Dos postes de 12 y 18 metros de altura distan entre sí 30 metros. Se desea tender un cable uniendo un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de estos. ¿En qué posición debe situarse dicho punto en el suelo para que la longitud del cable sea mínima?

31.- Dentro de un triángulo limitado por los ejes OX, OY y la recta 2x+y=8 se inscribe un rectángulo de vértices (0,0), (a,0), (0,b) y (a,b) (el último punto está sobre la recta). Determinar el punto (a,b) para que el rectángulo sea de área máxima. ¿Cuál será dicho punto para que el rectángulo sea de área mínima?

32.- En un paralelogramo rectángulo (figura plana) de 4 m. de perímetro se sustituyen los lados por semicircunferencias exteriores al rectángulo. Halla las dimensiones que deben tener los lados para que el área resultante sea mínima.

33.- Se desea construir el marco para una ventana rectangular de 6 m^2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 20€, y el tramo vertical 30€. Calcula las dimensiones de la ventana para que el coste sea mínimo. ¿Cuál es dicho coste?

34.- Se quiere cercar un campo rectangular mediante una valla, aprovechando un muro ya existente. Se sabe que la valla del lado opuesto al muro cuesta 30€ el metro y la de los otros dos lados 10€. Si el presupuesto disponible es de 30.000€, halla el área del mayor reciento que puede cercarse.

35.- Una empresa láctea pretende envasar la leche en cajas de 1 litro con forma de prisma de base rectangular cuya base la longitud de un lado sea el doble del otro. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja más económica (mínima superficie)?

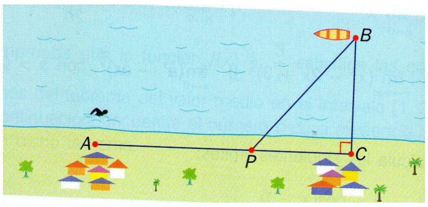
36.- Partimos un hilo metálico de longitud 1 metro en dos trozos, haciendo con uno un cuadrado y con el otro un círculo. Calcula las dimensiones de cada trozo para que la suma de sus áreas sea mínima. ¿Y para que sea máxima?

37.- Calcula la base y la altura de un triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

38.- Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm. de altura y márgenes laterales de 1 cm. Obtén, razonadamente, las dimensiones que minimizan la superficie de papel.

39.- De todos los cilindros de volumen 1/3, calcular las dimensiones del que tiene menor superficie.(Indicación: La superficie está compuesta por dos círculos de radio r y un rectángulo de altura h y el volumen del cilindro es $V = \pi r^2 h$)

40.- Se desea ir desde A hasta P andando y desde allí a B nadando. Si nada a 3 km/h y camina a 5 km/h., ¿a qué distancia de A se encuentra el punto P para llegar hasta B lo antes posible? (Supongamos que AC 10 km. y BC 5 km.)



41.- Sea la función $f(x)=x+e^{-x}$. Estudia la monotonía, curvatura y asíntotas y represéntala. Luego, demostrar que existe algún número real c tal que $c+e^{-c}=0$.

42.- Probar que la ecuación $x^3+x-5=0$ tiene al menos una solución en (1,2).

43.- Dada la función $f(x)=x^3-x^2+x$, ¿se puede afirmar que existe al menos un punto c interior al intervalo $[1,2]$ tal que $f(c)=2$?

44.- Aplicar el Teorema de Bolzano para probar que las gráficas de $f(x)=\log x$ y $g(x)=e^{-x}$ se cortan en algún punto y localizarlo aproximadamente.

45.- Prueba que las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=e^{-x}$, se cortan en un único punto en el intervalo (0,1).

46.- Demuestra que la ecuación $x^3+x^2+x=2$ tiene una única solución en (-1,1).

47.- Dada la función $f(x)=x^3-3x^2$, ¿se puede afirmar que existe al menos un punto c interior al intervalo $[3,4]$ tal que $f(c)=c$?

48.- Probar que la función $f(x)=e^x-x-3$ tiene un único cero en el intervalo $(0,\infty)$.

49.- Comprobar que la ecuación $x^3+3x+3=0$ tiene una única solución real.

50.- Comprobar que la ecuación $2x^3-6x+1=0$ tiene una única solución real en (0,1).

51.- ¿Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x)=x^7-3x^6+2sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ en el intervalo $[0,1]$?

52.- Estudia la derivabilidad de la función $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ y analiza si la función verifica las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[-1,1]$.

53.- Dada la función $f(x)=ax+b+senx$, obtener $a\ y\ b$ sabiendo que su gráfica pasa por el punto (0,0), cuya recta tangente en (0,0) es el eje X.
Posteriormente, justificar que la función $g(x)=\dfrac{-2x}{\pi}+senx$ se anula en dos puntos del intervalo $[0,\pi]$.

54.-Demuestra que la función $f(x)=\ln(1+xsenx)$ tiene un máximo relativo en el intervalo $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$.