1.- Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y k un número natural.

a) Calcula A^k.   b) Halla la matriz X que verifica: $A^k \cdot X = B \cdot C$.

2.- Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e I la matriz unidad de orden 3.

a) ¿Existe algún valor real m tal que: $(A - I)\cdot(A + mI) = I$?
b) Razona si la matriz $A - I$ es inversible.

3.- Una matriz cuadrada A tiene la propiedad de que $A^2 = 2A + I$.
a) Demuestra que A admite matriz inversa, y hállala en función de A.
b) ¿Para qué valores de m la matriz $A = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$ cumple la propiedad anterior?
Para esos valores de m calcula la matriz inversa de a A.

4.- Calcula, si existe, la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}$. ¿Para qué valores de a y b $A^{-1} = A$?

5.- ¿Para qué valores de λ, la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ tiene inversa?
Posteriormente, halla los valores de b para que el determinante de la matriz $b \cdot A$ sea 1.

6.- ¿Para qué valores de a y b, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & a & b-1 \\ 1 & a & -1 \end{pmatrix}$ tiene inversa? Hállala para $a = b = 1$.

7.- Resuelve la ecuación matricial: $(A + X)^2 = X^2 + X \cdot A + I$, con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8.- Sea el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x\cos a + y\,sen\,a = 1 \\ x\,sen\,a - y\cos a = 1 \end{cases}$.
a) Resuélvelo, determinando x e y en función de a.
b) Calcula a para que $x + y = 1$.

9.- Resuelve sin utilizar la regla de Sarrus.

a) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ 1 & 2a^2-1 & 2a-1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$

10.- Dado el sistema de ecuaciones con un parámetro real $\begin{cases} x+ay+2z=3 \\ x-y-az=1 \\ 3x-ay=5 \end{cases}$, se pide:

a) Justifica para qué valores del parámetro real a el sistema tiene solución única.
b) Determina para qué valores del parámetro real a la solución es (1,2,2).
c) Determinar el valor de a para el que la solución (x, y, z) cumple $x+y=3$.

11.- Halla, sin la regla de Sarrus, los valores de x para que $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix}=0$

12.- ¿Qué debe cumplir a, b y c para que $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=2 \\ a^2x+b^2y+c^2z=3 \end{cases}$ tenga solución única?

13.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, determina todas las matrices no nulas $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que verifican la igualdad $A \cdot X = t \cdot X$ para algún valor real t.

14.- Dado el sistema de ecuaciones con un parámetro real $\begin{cases} ax+y+z=(a-1)(a+2) \\ x+ay+z=(a-1)^2(a+2) \\ x+y+az=(a-1)^3(a+2) \end{cases}$:

a) Justifica para qué valores del parámetro real a el sistema tiene solución única.
b) ¿Para qué valores del parámetro real a el sistema es compatible indeterminado?
c) Estudia la posición relativa de los planos dados en el sistema en función de a.
d) Para que valores de a la solución del sistema es (2,-2,0).

15.- Dado el sistema de ecuaciones con dos parámetros reales $\begin{cases} \lambda x+y+2\mu z=1 \\ 2\mu x+y+2\mu z=1+3\lambda \\ \mu x \qquad + \mu z=2\lambda \end{cases}$:

a) ¿Para qué valores de los parámetros λ y μ el sistema tiene solución única?
b) Determina para qué valores de λ y μ la solución es (1,2,0).
c) Sabiendo que $\mu=1$, determina el valor de λ para el que se cumpla $x+y+z=0$.

16.- Resuelve la siguiente ecuación matricial: A·X=B, donde:

a) A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) A= $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

17.- Dado el sistema de ecuaciones con dos parámetros reales $\begin{cases} cx+(a+1)y+bz=a \\ 2ay+bz=a+b \\ 2x+2y+cz=b \end{cases}$:

a) Justifica razonadamente que para los valores $a=1, b=1\ y\ c=0$ el sistema es incompatible.
b) Determina para qué valores de $a, b\ y\ c$, $(x,y,z)=(0,2,-1)$ es solución del sistema.
c) Justificar si la solución $(x,y,z)=(0,2,-1)$ del apartado b) es, o no, única.

18.- Dadas las matrices $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular las matrices $(A-I)^2$ y $A\cdot(A-2I)$.
b) Justificar razonadamente, y sin hacer cálculos, que:
b.1) Existen las matrices inversas de las matrices $A\ y\ A-2I$.
b.2) No existe matriz inversa de la matriz $A-I$.
c) Determinar el valor del parámetro real λ para el que se verifica $A^{-1}=\lambda\cdot(A-2I)$.

19.- Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y M, que cumple: $M^2=M$.

a) Obtener todos los valores reales k para los que $B=A-kI$ tiene inversa.
b) Calcula la matriz inversa, B^{-1} para $k=3$.
c) Halla las constantes reales $\alpha\ y\ \beta$ para los que se verifica que $\alpha A^2+\beta A=-2I$.
d) Comprobar razonadamente que $P=I-M$ cumple: $P^2=P\quad y\quad M\cdot P=P\cdot M$.

20.-Si tenemos un sistema compatible indeterminado de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas, ¿se puede conseguir un sistema incompatible añadiendo una tercera ecuación?

21.- Si a un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas incompatible le agregamos otra ecuación, ¿podríamos lograr que fuera compatible indeterminado? ¿y determinado?

22.-Sea M una matriz cuadrada de orden 2. ¿Se puede asegurar que se cumple: $\det(M^2)=(\det M)^2$?, y, ¿ $\det(M+I)=\det(M)+\det(I)$?. Razona las respuestas.
A continuación encuentra todas las matrices M, tales que: $\det(M+I)=\det(M)+\det(I)$

23.- Si A es una matriz tal que $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcula razonadamente el valor de $|A|$.

24.- Sean A y B dos matrices invertibles que verifican la identidad $A+B=A\cdot B$.
Comprueba que se cumple: $(I-A)^{-1}=-A^{-1}\cdot B$. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, halla la matriz B para la cual se verifica $A+B=A\cdot B$.

25.- Dado un sistema con mismas ecuaciones que incógnitas y el determinante de la matriz del sistema es cero.¿Qué podemos deducir sobre las soluciones de dicho sistema? ¿Podemos añadir una ecuación y hacer que dicho sistema sea compatible determinado?

26.- Dado el sistema de ecuaciones en función de a, b y c $\begin{cases}2ax+by+z=3c\\ 3x-2by-2cz=a\\ 5ax-2y+cz=-4b\end{cases}$, se pide:

a) Justificar razonadamente que para $a=0,\ b=-1\ y\ c=2$ el sistema es incompatible.
b) Determinar razonadamente los valores de los parámetros de $a,\ b\ y\ c$, para los que se verifica que $(x,y,z)=(1,2,3)$ es solución del sistema.
c) Justificar si la solución $(x,y,z)=(1,2,3)$ del sistema del apartado b) es, o no, única.

27.- Discute y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases}ax+y+z=b\\ x+y+az=2\\ 2x+y+az=b\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x-y+z=3\\ x-y+z=2\\ 3x-y-az=b\end{cases}$ c) $\begin{cases}x+2y+z=0\\ y+2z+t=0\\ 2x+2ky-t=0\end{cases}$

d) $\begin{cases}ax+y+bz=3\\ x+y+z=3\\ 2x+y+2z=3\end{cases}$ e) $\begin{cases}ax+y+z=1\\ x+ay+z=1\\ x+y+az=1\\ x+y+z=a\end{cases}$ f) $\begin{cases}x+2y-3z=0\\ 2x+5y-8z=0\\ ax+by+3z=0\\ ax+y+bz=0\end{cases}$

SOLUCIONES:

a) $a\neq 1,\forall b\rightarrow SCD$; $a=1,b\neq 2\rightarrow SI$; $a=1,b=2\rightarrow SCI$

b) $a\neq -1,\forall b\rightarrow SCD$; $a=-1,b=4\rightarrow SCI$; $a=-1,b\neq 4\rightarrow SI$

c) $k\neq 3\rightarrow SCI$; $k=3\rightarrow SCI$

d) $a\neq b\rightarrow SCD$; $a=b\rightarrow SCI$

e) $a\neq 1,-3\rightarrow SI$; $a=1\rightarrow SCI$; $a=-3\rightarrow SCD$

f) $b=1,a=0\rightarrow SCI$; $b=1,a\neq 0\rightarrow SCD$; $b\neq 1\rightarrow SCD$

TEOREMA DE ROUCHÉ (DISCUSIÓN DE SISTEMAS)

$$\begin{cases}Rango(A)=Rango(A') \begin{cases}=n^{o}\,de\,incógnitas\rightarrow SCD\ (\text{Resolver con método de Cramer})\\ \neq n^{o}\,de\,incógnitas\rightarrow SCI\rightarrow\left[n^{o}\,Parámetros=n^{o}\,de\,incógnitas-Rango(A)\right]\end{cases}\\ Rango(A)\neq Rango(A')\rightarrow SI\end{cases}$$

	Rg(A)	Rg(A´)	Sistema	Posición de tres planos
Caso 1	**3**	**3**	**SCD**	**Planos secantes en un punto**
Caso 2	**2**	**2**	**SCI**	**Planos secantes a lo largo de una recta**
Caso 3	**1**	**1**	**SCI**	**Tres planos coincidentes**
Caso 4	**2**	**3**	**SI**	**Planos secantes dos a dos** **Dos planos paralelos cortados por el otro**
Caso 5	**1**	**2**	**SI**	**Planos paralelos distintos dos a dos** **Dos planos coincidentes y el otro paralelo**

SI.- Los tres planos no tienen ningún punto en común, los tres a la vez (Caso 4 y 5).