HOJA DE EJERCICIOS

1.- Halla los valores de a y b en la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, de forma que $A^2-2\cdot A=B$, siendo $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.- Halla los valor de x e y para que se cumpla la ecuación $A^2-x\cdot A-y\cdot I=0$, con $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, e I la matriz identidad de orden 2.

3.- Resuelve la ecuación A·X=B, siendo A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y B=$\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$.

4.- Resuelve la ecuación $A\cdot X+X-B^t=C$, con $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $y\, C=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

5.- Resuelve el sistema de ecuaciones $\begin{cases} A\cdot X-2\cdot Y^{-1}=0 \\ A\cdot X+Y^{-1}=B \end{cases}$, con $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

6.- Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(a) Calcula los valores de λ para los que la matriz A + λI no tiene inversa.
(b) Resuelve el sistema A·X = 3X e interpreta geométricamente el conjunto solución.

7.- Disponemos de tres lingotes de distintas aleaciones de tres metales *A*, *B* y *C*. El primer lingote contiene 20 g del metal *A*, 20 g del *B* y 60 del *C*. El segundo contiene 10 g de *A*, 40 g de *B* y 50 g de *C*. El tercero contiene 20 g de *A*, 40 g de *B* y 40 g de *C*. Queremos elaborar, a partir de estos lingotes, uno nuevo que contenga 15 g de *A*, 35 g de *B* y 50 g de *C*. ¿Cuántos gramos hay que coger de cada uno de los tres lingotes?

8.- En una residencia de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y nata. El presupuesto destinado para esta compra es de 540 euros y el precio de cada helado es de 4 euros el de vainilla, 5 euros el de chocolate y 6 euros el de nata. Conocidos los gustos de los estudiantes, se sabe que entre helados de chocolate y de nata se han de comprar el 20% más que de vainilla. ¿Cuánto helados de cada sabor compran?

9.- Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Encuentra los valores del parámetro a, para lo que la matriz A no es invisible.
b) Calcula A^{-1} para a=2.

10.- Dado el sistema de ecuaciones con un parámetro real $\begin{cases} (\lambda+2)x+y+z=1 \\ 2x+\lambda y+z=2 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$:

a) ¿Para qué valores del parámetro λ el sistema tiene solución única?
b) Determina para qué valores de λ la solución es (1,0,-2).
c) Determina para qué valores de λ se cumple $x+y+z=0$.

11.- Dadas las matrices $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular las matrices $(A-I)^2$ y $A\cdot(A-2I)$.
b) Justificar razonadamente que:
   b.1) Existen las matrices inversas de las matrices A y $A-2I$.
   b.2) No existe matriz inversa de la matriz $A-I$.
c) Determinar el valor del parámetro real λ para el que se verifica $A^{-1}=\lambda\cdot(A-2I)$.

12.- Discute y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} ax+y=a \\ (a+1)x+2y+z=a+3 \\ 2y+z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax+2z=0 \\ (a-2)y+z=0 \\ (a-1)x+y-z=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-y+az=1 \\ 2x+y+az=3 \\ x+2y-az=b \end{cases}$

13.- Se considera la recta *r* como la intersección de los planos $\pi_1: 2x-2y-z=9$ y $\pi_2: 4x-y+z=42$. Por otra parte se define la recta *s* como la que pasa por los puntos P(1,3,4) y Q(3,5,2). Se pide:
a) Hallar la posición relativa de las rectas *r* y *s*.
b) Hallar la ecuación de la recta *t* que es perpendicular a la recta *s*, es paralela al plano π_1 y que además pasa por el punto P(1,0,0).
c) Hallar la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas *r* y s.
d) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta *s* y es perpendicular al plano OXZ.
e) Calcular la distancia entre las rectas *r* y *s*

14.- Estudiar las posiciones relativas de los planos $\pi_1: x+y+z=-3$, $\pi_2: \begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=-\lambda+\mu \\ z=-6-\mu \end{cases}$

y la recta $r: \dfrac{x-3}{2}=y=\dfrac{z-3}{3}$. Posteriormente, halla:
a) Un punto P de la recta *r* que esté a la misma distancia de π_1 y π_2.
b) Un vector unitario, perpendicular a los vectores normales de π_1 y π_2.
c) Los puntos de corte con los ejes coordenados y el área del triángulo formado por dichos puntos.

15.- Dadas las rectas $r:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{2}=-z-1$ y $s:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z}{3}$. Determina la ecuación del plano π, que contiene a r y es paralelo a s, y la distancia de π a s.

16.- Los puntos $A(3, 0, 2)$, $B(5, -1, 1)$ y $C(-2, 3, 1)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo. Obtén el cuarto vértice, el centro y los ángulos interiores del mismo.

17.- Se consideran las rectas: $r:\begin{cases} x=0 \\ 2y+z-1=0 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x-z-2=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}$

y el plano π, que pasa por los puntos $A(1, 0, 2)$, $B(2, 1, 2)$ y $C(1, 0, 1)$.

a) Halla la ecuación de la recta perpendicular común de r y s.

b) Da la ecuación general o implícita de π.

c) Comprueba que una recta corta a π. Di cuál es y halla el ángulo forman con π.

d) Justifica que la otra recta es paralela a π. Halla la distancia de dicha recta a π.

e) Halla un plano que diste 5 unidades de π.

18.- Dados los planos $\pi_1: 2x-y+z=5$ y $\pi_1: mx+ny+2z+3=0$.

a) Halla los valores de *m* y *n* para que los siguientes planos sean paralelos:

b) Halla A, B y C los puntos de corte de π_1 con los ejes coordenados. Posteriormente, calcula el área del triángulo de vértices ABC y el tetraedro de vértices 0ABC.

19.- Estudia la posición relativa de las rectas r_1 y r_2 en función del parámetro k, siendo $r_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{5}$ y $r_2:\dfrac{x-3}{2}=y=\dfrac{z-k}{3}$. Para k=0 halla la distancia de r_1 a r_2.

20.- Calcula las coordenadas del punto de la recta $r: x-1=y+3=\dfrac{z-4}{2}$ más cercano a P(1,-3,7). Porteriormente, calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.

21.- Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A=(1,6) y B=(5,2) y tiene su centro sobre la recta y=2x

22.- Los puntos A=(3,3,5) y B=(3,3,2) son vértices consecutivos de un rectángulo ABCD. El vértice C consecutivo de B está en la recta $r: x=\dfrac{y-6}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$.

Determina el vértice C y el vértice D, así como el área del rectángulo.

23.-Halla el punto de la recta $r: x=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$ que equidista de A(1,2,1) y del origen.

24.- Calcula el área del triángulo de vértices A(0, 0, 1), B(0, 1, 0) y C, siendo C la proyección ortogonal del punto (1, 1, 1) sobre el plano x + y + z = 1

25- Halla un punto A de la recta r de ecuación x = y = z y un punto B de la recta s de ecuación $r: x = -y = \frac{z+1}{2}$ de forma que la distancia entre A y B sea mínima.

26- Dados el punto P(1,1,-1) y la recta r de ecuaciones x+z=1 y+z=0
a) Halla la ecuación del plano que contiene a r y pasa por P.
b) Halla la ecuación de la recta contenida en el plano de ecuación y + z = 0, que es perpendicular a r y pasa por P.

27- Dado el plano π :2x − y + nz = 0 y la recta $r: \frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2},\ \ con\ m \neq 0$.
(a) Calcula m y n para que la recta r sea perpendicular al plano π.
(b) Calcula m y n para que la recta r esté contenida en el plano π

28 Considera los planos π_1, π_2, π_3 dados respectivamente por las ecuaciones:
x + y = 1, ay + z = 0 y x + (1+a)y + az = a + 1
(a) ¿Cuánto ha de valer "a" para que no tengan ningún punto en común?
(b) Para a = 0, determina la posición relativa de los planos.

29 Obtén la ecuación de la esfera que tiene el mismo centro que la circunferencia $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 2z - 61 = 0$ y es tangente al plano $x + y - z + 6 = 0$.

30- Un cuadrado tiene uno de sus lados sobre la recta $r: (1+\lambda, -2\lambda, 3-\lambda)$ y el otro sobre $r: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z}{-2}$ .Calcula el área del cuadrado.
Si uno de los vértices es A(1,0,3) de r. Encuentra el resto de vértices.

31- Estudiar las posiciones relativas del plano $\pi_1: x + ay - z = 1$ y la recta $r: \begin{cases} y - az = 2 \\ x - z = a - 1 \end{cases}$ según los valores del parámetro a.
a) Hala el valor del parámetro a para que el plano y la recta formen un ángulo de 30º.
b) Calcula el ángulo que forman el plano y la recta para a=1.
c) Para el valor de a que hace a π_1 y a r paralelos

32- Calcula la distancia de P(2, 1, −1) a la recta r : (4λ, 1 − λ, λ). Halla el punto de la recta r que está a mínima distancia de P.

33.- Los puntos P(0, 2, 0) y Q(2, 1, −1) son dos vértices de un triángulo, y el tercero, S, pertenece a la recta $r: (2+\lambda, -\lambda, 3)$. La recta que contiene a P y S es perpendicular a r
a) Determina las coordenadas de S.
b) Calcula el área del triángulo PQS.

34.- Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2} \right)^{2x}$ b) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2 - 3x} - 2x$ c) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{x-2}{x^2}$ d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+4} - 2}{\sqrt{x+1} - 1}$